PREMIER PROBLÈME

Si E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois, on notera $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs, et $x \wedge y$ leur produit vectoriel. On notera $\det(x, y, z)$ le produit mixte de trois vecteurs de E. Id_E désignera l'application identité de E dans lui-même. On notera $\mathbb{R}\,x$ la droite vectorielle engendrée par un vecteur x dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque.

On notera $M_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux à coefficients complexes.

On rappelle que $M_2(\mathbb{C})$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I

1. On considère l'application ψ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans $M_2(\mathbb{C})$ qui à un couple (z, z') associe la matrice :

$$\begin{pmatrix} z & z' \\ -\bar{z}' & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que ψ est $\mathbb{R}$-linéaire. On note $H = \mathrm{Im}(\psi)$.

b. Montrer que H est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{C})$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de H soit inversible dans $M_2(\mathbb{C})$ et montrer qu'alors son inverse appartient à H. (Il s'agit d'inverse pour la multiplication des matrices.) Conclusion ?

c. On note : $1_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $(1_H, I, J, K)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel H.

Calculer I^2, J^2, K^2, IJ, JI, JK, KJ, IK, KI. Justifier la notation 1_H, et l'identification de $\mathbb{R}\,1_H$ et de $\mathbb{R}$.

2. On définit E = Vect (I, J, K), et on le munit du produit scalaire qui fait de (I, J, K) une base orthonormée directe.

a. Dire pourquoi : $\forall\, q \in H,\ \exists!\,(t, x) \in \mathbb{R} \times E,\ q = t + x$.

On pose $R(q) = t$, $V(q) = x$, $\bar{q} = t - x$ (conjugué de q), $N(q) = q\bar{q}$.

b. Montrer que pour tous q, q', q'' de H :

$$R(qq') = R(q)\,R(q') - (V(q) \mid V(q')).$$

$$V(qq') = R(q)\,V(q') + R(q')\,V(q) + V(q) \wedge V(q').$$

Prouver que si v, v', v'' sont des éléments de E :

$$R(vv'v'') = -\det(v, v', v'').$$

c. À quelle condition a-t-on : $q = \bar{q}$? $q = -\bar{q}$?

Montrer que l'application qui à un élément de H associe son conjugué est linéaire.

Calculer $\overline{qq'}$ en fonction de $\bar{q}$ et $\bar{q}'$.

Montrer que $N(q)$ est élément de $\mathbb{R}_+$, calculer $N(qq')$ en fonction de $N(q)$ et $N(q')$, puis pour q non nul calculer q^{-1} en fonction de $\bar{q}$ et de $N(q)$.

Démontrer que si q n'est pas un réel, $\bar{q} = q' \Leftrightarrow \begin{cases} q + q' \in \mathbb{R} \\ qq' \in \mathbb{R} \end{cases}$

d. On pose $S_3 = \{\, q \in H,\ N(q) = 1 \,\}$. Montrer que c'est un sous-groupe multiplicatif de $H - \{0\}$.

II

1. On appelle *automorphisme* de H toute application linéaire bijective f de H dans lui-même telle que : $\forall (q, q') \in H \times H,\ f(qq') = f(q) f(q')$. On note Aut(H) leur ensemble.

   a. Calculer $f(1)$; que peut-on en déduire ?

   b. Calculer $f(\bar{q})$. En déduire que f laisse E stable.
   Calculer alors $N(f(q))$ et $R(f(q))$.

   c. Prouver que f induit une rotation de E. (Utiliser la base (I, J, K) et le produit mixte.)

2. Pour un élément s non nul de H, on définit $I_s : H \to H$
   $q \to sqs^{-1}$.

   a. Montrer que I_s est un élément de Aut(H); pour s et s' non nuls de H, déterminer $I_s \circ I_{s'}$.

   b. Justifier l'existence de l'application induite par I_s sur E, notée $\mathcal{I}_s$.

   c. On écrit $s = t + z$, t réel et z dans E. Montrer que z est nul si et seulement si $\mathcal{I}_s = Id_E$.

   d. On suppose z non nul; d'après 1.*c.*, $\mathcal{I}_s$ est une rotation de E; montrer que son axe est $\mathbb{R}z$, et que si on oriente cet axe par z, la mesure de son angle dans $]-\pi; \pi]$ est : $\theta = \pi$ si $t = 0$, $\theta = 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{\|z\|}{t}\right)$ si $t \neq 0$. (On considérera x unitaire orthogonal à z, $y = \frac{1}{\|z\|} z \wedge x$, et on montrera que
   $$sxs^{-1} = \cos(\theta)\, x + \sin(\theta)\, y).$$

   e. On considère u élément de $O+(E)$; établir l'existence d'un élément s non nul de H tel que $u = \mathcal{I}_s$. En déduire que l'application de S_3 dans $O+(E)$ qui à s associe $\mathcal{I}_s$ est un morphisme surjectif de noyau $\{-1; 1\}$.

3. Soit f un élément de Aut(H); en utilisant l'application induite par f à E et le fait que $\mathbb{R}$ et E sont supplémentaires dans H, prouver l'existence d'un élément s non nul de H tel que $f = I_s$.

SECOND PROBLÈME

Soit P un plan affine euclidien de direction $\vec{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On notera $M(x, y)$ un point de coordonnées (x, y). On rappelle que l'angle orienté de deux droites vectorielles Δ_1, Δ_2 est le réel a défini modulo π par : Δ_2 est l'image de Δ_1 par la rotation d'angle a. L'angle orienté de deux droites affines est celui de leurs directions respectives.

Soit f l'application :

$$P - \{O\} \to P - \{O\}$$

$$M \mapsto M_1 \text{ tel que } \overrightarrow{OM_1} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2}.$$

I

1. Écrire les coordonnées (u, v) de M_1 en fonction des coordonnées (x, y) de M dans le repère $\mathcal{R}$.
   On notera encore $(u, v) = f(x, y)$.

2. Déterminer la matrice jacobienne J (M) de f en M (a, b).
Montrer que J est de la forme λQ où Q est une matrice orthogonale dont on déterminera la nature ainsi que les éléments caractéristiques.
On notera φ *l'application linéaire de matrice* J *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$.

3. Soit C une courbe paramétrée par $\lambda \in I \mapsto (x(\lambda), y(\lambda))$, I intervalle de $\mathbb{R}$, régulière, et soit Γ son image par f.
Soit $\vec{t}$ un vecteur directeur de la tangente à C au point M de paramètre λ. Que dire du vecteur $\varphi(\vec{t})$?

4. Soient C_1 et C_2 deux arcs paramétrés qui se coupent au point M et dont les tangentes font entre elles un angle orienté α. Que dire des tangentes à Γ_1 et Γ_2 au point $f(M)$?

5. Soit C une courbe de classe C^2, régulière, définie en coordonnées polaires par $\rho = r(\theta)$, θ décrivant un intervalle de $\mathbb{R}$. On note V l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{t} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}$ (angle orienté de vecteurs).

   a. Quelle est l'équation en coordonnées polaires de $\Gamma = f(C)$?

   b. Soit V_1 l'angle $\left(\overrightarrow{OM_1}, \dfrac{d\overrightarrow{M_1}}{d\theta}\right)$, où $M_1 = f(M)$. Quelle relation simple lie V et V_1?

   c. Retrouver le résultat de la question 4.

II

1. Déterminer l'image par f des courbes suivantes :

   a. Le cercle de centre O, de rayon R.

   b. Un cercle passant par O.

   c. Un cercle non défini en *a.* et en *b.*

2. Soit C_1 le cercle d'équation en coordonnées polaires $\rho = 2R\cos(\theta)$, et C_2 le cercle d'équation $\rho = R\cos(\theta)$. Soit M (θ) un point autre que O de C_2.

   a. Montrer sans calcul qu'il existe un unique cercle C tangent au cercle C_2 en M (θ) et au cercle C_1. (On pourra commencer par déterminer $\Gamma = f(C)$.)

   b. Construire de façon géométrique le cercle C dans le cas où M est le point de paramètre $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

   (On pourra commencer par construire Γ, puis le point M', point de tangence de C et de C_1.)
   Faire un dessin en prenant $R = \dfrac{1}{2}$ (unité 6 cm).

   c. Déterminer les coordonnées de Ω, centre du cercle C, ainsi que le rayon de ce cercle.

   d. Déterminer la nature ainsi que les éléments caractéristiques du lieu des points Ω lorsque M décrit C_2. Tracer cette courbe sur la figure précédente.